

Sygnal analityczny

Definiuje się sygnał $s_+(t)$ zwany analitycznym

$$g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t)$$

Przyjmując, że widmo sygnału $g(t)$ ma postać $G(f)$ możemy wyznaczyć widmo $G_+(f)$ sygnału analitycznego $g_+(t)$ jako

$$G_+(f) = G(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)G(f) = G(f) + \operatorname{sgn}(f)G(f)] = \begin{cases} 0; & f < 0 \\ G(0); & f = 0 \\ 2G(f) & f > 0 \end{cases}$$

Sygnal analityczny może być określony dla dowolnego sygnału $s(t)$ mającego widmo, a więc poddającemu się przekształceniu Fouriera.. Sygnal analityczny ma szczególne znaczenie dla opisu i analizy właściwości sygnałów pasmowych, a więc takich, z jakimi mamy najczęściej do czynienia w przypadku modulacji. Pozwala on bowiem rozpatrywać jedynie składowe widmowe sygnału dla nieujemnych częstotliwości bez żadnych strat informacji zwartych w widmie. Sygnałem wąskopasmowym nazywa się sygnał, którego widmo ma szerokość pasma znacznie mniejszą od dowolnie wybranej częstotliwości, leżącej wewnątrz pasma sygnału. Oznaczając taką arbitralnie wybraną częstotliwość, najczęściej w jakimś stopniu umieszczoną centralnie, symbolem f_c można sygnał analityczny $s_+(t)$ zapisać w następującej postaci

$$g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t) = \tilde{g}(t)e^{j2\pi f_c t}$$

Czynnik $\tilde{g}(t)$ jest nazwany zespoloną obwiednią sygnału analitycznego $g_+(t)$. Wykorzystując właściwości przekształcenia Fouriera należy stwierdzić, że widmo zespolonej obwiedni jest skupione wokół częstotliwości zerowej i ma szerokość pasma równą szerokości pasma analitycznego sygnału pasmowego. Części rzeczywistą i urojoną zespolonego sygnału analitycznego, którymi są sygnały $g(t)$ i jego transformata Hilberta $\hat{g}(t)$, można wyrazić za pomocą części rzeczywistej $g_I(t)$ i urojonej $g_Q(t)$ jego zespolonej obwiedni $\tilde{g}(t)$.

$$g(t) = \operatorname{Re}\{[g_I(t) + jg_Q(t)]e^{j2\pi f_c t}\} = g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

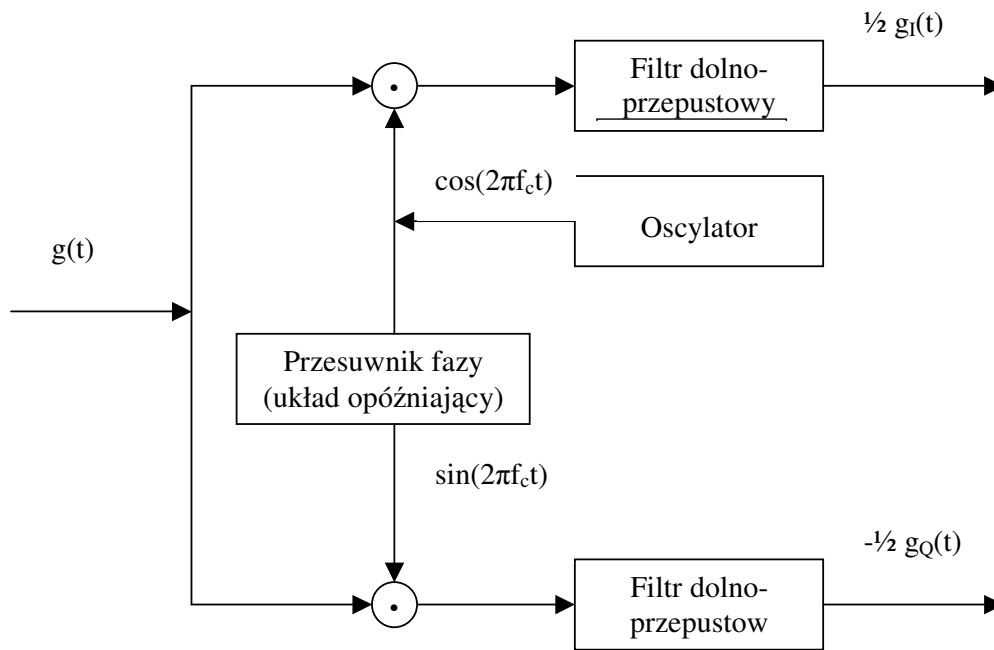
sygnały $g_I(t)$ oraz $g_Q(t)$ są nazywane odpowiednio składowymi synfazową (I – in-phase) i kwadraturową (Q – quadrature) sygnału pasmowego $g(t)$.

Mnożenie sygnału $g(t)$ przez sygnał $\cos(2\pi f_c t)$ lub $\sin(2\pi f_c t)$ prowadzi do następujących wyników

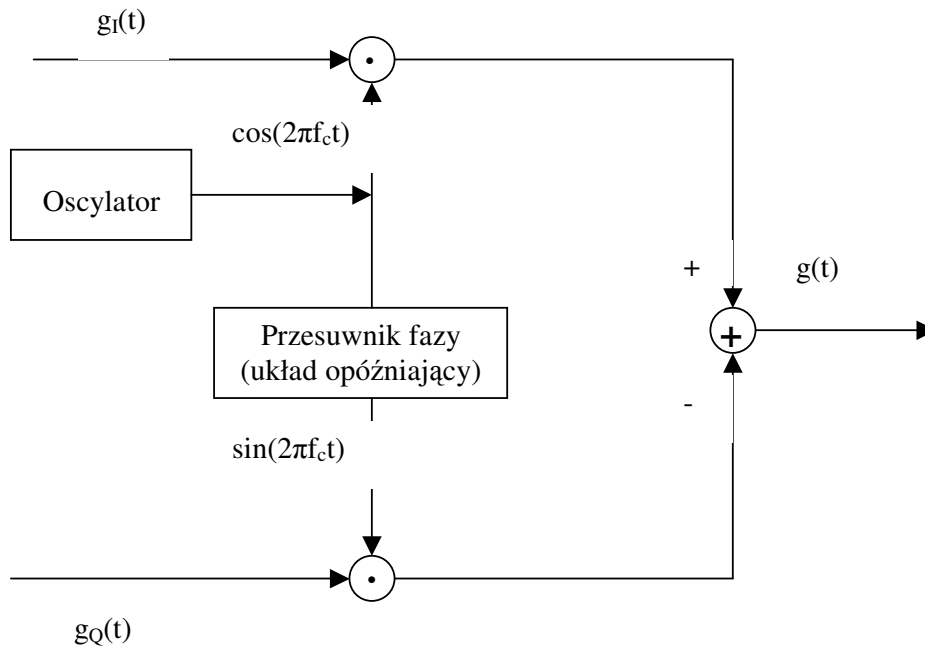
$$\begin{aligned} g(t)\cos(2\pi f_c t) &= [g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t)]\cos(2\pi f_c t) = \\ &= g_I(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) = \\ &= \frac{1}{2}g_I(t) + \frac{1}{2}g_I(t)\cos(4\pi f_c t) - \frac{1}{2}g_Q(t)\sin(4\pi f_c t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(t) \sin(2\pi f_c t) &= [g_I(t) \cos(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t)] \sin(2\pi f_c t) = \\
 &= g_I(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) = \\
 &= \frac{1}{2} g_I(t) \sin(4\pi f_c t) - \frac{1}{2} g_Q(t) + \frac{1}{2} g_Q(t) \cos(4\pi f_c t)
 \end{aligned}$$

Wyeliminowanie składowych o wysokich częstotliwościach (związanych ze składnikami zależnymi od $\cos(2\pi f_c t)$ lub $\sin(2\pi f_c t)$) pozwala uzyskać sygnał $\frac{1}{2} g_I(t)$ w pierwszym przypadku i $-\frac{1}{2} g_Q(t)$ w drugim. Eliminację składowych widma można zrealizować metodą filtracji dolnoprzepustowej co pozwala generować składowe kwadraturowe w następującym układzie



Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że odtworzenie sygnału pierwotnego na podstawie jego składowych kwadraturowych jest możliwe w układzie pokazanym poniżej



Systemy pasmowe

Do analizowania przetwarzania sygnałów pasmowych w systemach pasmowych korzystne okazuje się stosowanie identycznych modeli zarówno dla sygnałów jak i dla systemów. W kontekście tego skryptu jest naturalne, aby właściwości systemu opisywać także w ramach teorii przekształcenia Hilberta. W tym celu należy traktować odpowiedź impulsową $h(t)$ systemu pasmowego jako sygnał pasmowy i określać odpowiadający mu sygnał analityczny $h_+(t)$

$$h_+(t) = h(t) + j\hat{h}(t) = \tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t}$$

$$\tilde{h}(t) = h_I(t) + jh_Q(t)$$

$$h(t) = \text{Re}[\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Można wykazać, że zespolona obwiednia $\tilde{y}(t)$ sygnału wyjściowego $y(t)$, pobudzanego sygnałem $x(t)$, którego zespolona obwiednia ma postać $\tilde{x}(t)$, jest określona następującą zależnością

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} \tilde{x}(t) * \tilde{h}(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\mathbf{x}_+(\tau)] \text{Re}[\mathbf{h}_+(t - \tau)] d\tau$$

Do określenia postaci sygnału $y(t)$ przydatna jest następująca relacja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[x_+(\tau)] \text{Re}[h_+(\tau)] d\tau = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_+(\tau) h_+^*(\tau) d\tau \right]$$

Jej słuszność można wykazać w następującym rozumowaniu

$$\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_+(\tau) h_+(\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\tau) \hat{h}(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H(-f) df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H^*(f) df$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\tau) \hat{h}(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f) \hat{H}(-f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f) \hat{H}^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} [-j \text{sgn}(f) X(f)] [-j \text{sgn}(f) H^*(f)] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-j \text{sgn}(f)] [-j \text{sgn}(f)] X(f) H^*(f) df = - \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H^*(f) df \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_+(\tau) h_+(\tau) d\tau \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\tau) \hat{h}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H^*(f) df - \left[- \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H^*(f) df \right] = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H^*(f) df = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[x_+(\tau)] \text{Re}[h_+(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

a zatem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[x_+(\tau)] \text{Re}[h_+(t-\tau)] d\tau$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x_+(\tau) h_+(t-\tau) d\tau &= \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau) e^{j2\pi f_0 \tau} \tilde{h}(t-\tau) e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau = \\ \frac{1}{2} \text{Re} e^{j2\pi f_c t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau) \tilde{h}(t-\tau) d\tau \right] &= \frac{1}{2} \text{Re} e^{j2\pi f_c t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [x_I(\tau) h_I(\tau) - x_Q(\tau) h_Q(\tau)] d\tau \right] \end{aligned}$$

uwzględniając składowe synfazowe i kwadraturowe wszystkich trzech sygnałów otrzymuje się następujące zależności

$$y_I(t) = \frac{1}{2} [h_I(t) * x_I(t) - h_Q(t) * x_Q(t)]$$

$$y_Q(t) = \frac{1}{2} [h_Q(t) * x_I(t) + h_I(t) * x_Q(t)]$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności staje się możliwe przedstawienie przetwarzania sygnału pasmowego w układzie pasmowym w następujący sposób

