

Transformata Hilberta i jej właściwości

Definicja :

Transformata Hilberta $\hat{g}(t); -\infty < t < \infty$ sygnału $g(t); -\infty < t < \infty$ jest określona

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Uwaga :

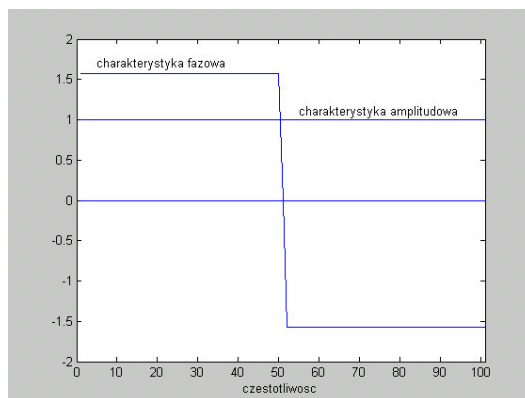
Całki w powyższych zależnościach są wartościami głównymi w sensie Cauchy'ego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Definicje transformat Hilberta mogą być traktowane jako operacje splatania przetwarzanego sygnału i funkcji $\frac{1}{\pi}$. Ponieważ funkcji tej można przyporządkować widmo (w sensie granicznym) o postaci $-j \operatorname{sgn}(f)$, to widmo transformaty $\hat{G}(f)$ Hilberta $\hat{g}(t)$ może być wyrażone w następujący sposób

$$\hat{G}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) G(f)$$

Powyższa zależność pozwala interpretować przekształcenie Hilberta jako filtrację sygnału przetwarzanego w filtrze o charakterystyce $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$ nazywanym często transformatorem Hilberta.



Charakterystyki częstotliwościowe transformatora Hilberta

Pokazane na rysunku charakterystyki pozwalają zauważyć, że sygnał $g(t)$ i jego transformata Hilberta $\hat{g}(t)$ mają identyczne widma amplitudowe. Ponadto wyjaśniają one słuszność definicji odwrotnego przekształcenia Hilberta.

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad \Rightarrow \quad G(f) = -\left(-j \operatorname{sgn}(f) \hat{G}(f)\right) = j \operatorname{sgn}(f) \left(-j \operatorname{sgn}(f) \hat{G}(f)\right) = G(f)$$

Bardzo ważną właściwością przekształcenia Hilberta jest ortogonalność sygnału $g(t)$ i jego transformaty $\hat{g}(t)$. Wykorzystując zależność mówiącą, że widmo iloczynu sygnałów jest określone przez splot ich widm mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \hat{g}(t) e^{-j2\pi f t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \hat{G}(f - v) dv \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \hat{G}(-v) dv \\ \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \hat{G}(-v) dv &= \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \hat{G}^*(v) dv = - \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \operatorname{sgn}(v) \hat{G}^*(v) dv = - \int_{-\infty}^{\infty} |G(v)|^2 \operatorname{sgn}(v) dv = 0 \end{aligned}$$